Uitwerking puzzel 93-5 **Wobien Doyer en Lieke de Rooij**

Dubbel vrijgezellenfeest

De puzzel ging over een vrijgezellenfeest waar $2n$ gasten zijn (n vrouwen en n mannen) plus het bruidspaar. Totaal dus $2n + 2$ personen. Voor de eerste vraag stonden er $2n$ stoelen op een rijtje, met op elke stoel één gast.
Als dat mogelijk is mag een van de personen precies drie stoelen opschuiven, naar links of naar rechts. Deze gaat dus op de derde stoel bij iemand op schoot zitten, mits die schoot niet al bezet is. De lege stoel wordt verwijderd. Vervolgens mag zo mogelijk een volgende persoon, die nog niemand op schoot heeft en niet zelf al op schoot zit, op dezelfde manier drie stoelen opschuiven. Dit moet zodanig worden herhaald tot er op alle stoelen twee gasten zitten.

Opgave 1a hadden alle inzenders goed. We geven de uitwerking 1a en 1b van Jos Remijn:

Opgave 1a: Geef een methode hoe dit lukt voor $n = 3$.

Als $n = 3$ hebben we dus 6 stoelen, genummerd 1 t/m 6.
Een stoel waarop twee personen zitten geef ik aan met een superscript, dus 4^1 betekent dat persoon 1 op schoot zit bij persoon 4.

1	2	3	4	5	6
	2	3	4^1	5	6
	2	3^6	4^1	5	
		3^6	4^1	5^2	

Opgave 1b: Toon aan dat het voor elke $n > 2$ mogelijk is, of laat zien dat dit niet het geval is.

Voor alle $n > 3$ kan met volledige inductie worden bewezen dat het ook lukt om op alle stoelen twee personen te krijgen. Voor $n = 3$ is het mogelijk.
Stel dat het mogelijk is voor een zekere waarde van n.
Dan bekijken we nu de situatie voor $n + 1$ personen. Dan hebben we $2n + 2$ stoelen.

1	2	3	4	…...	$2n$-1	$2n$	$2n$+1	$2n$+2
1^4	2	3	…….		$2n$-1	$2n$	$2n$+1	$2n$+2

We zien dat de persoon van stoel 4 op schoot gaat bij de persoon op stoel 1. We halen de lege stoel weg. De stoel waarop de personen 1 en 4 zitten doet niet meer mee.
Nu zijn er dus $2n$ stoelen over en volgens de inductieveronderstelling is het mogelijk om ervoor te zorgen dat op alle stoelen twee personen komen te zitten. Q.e.d.

In de volgende opgaven hebben we een ronde tafel met $2n + 2$ stoelen. Aanvankelijk zitten daar alle $2n$ gasten op in een bonte rij, dus afwisselend man, vrouw. En er blijven twee lege stoelen naast elkaar over voor het bruidspaar. De bedoeling is om een 'antibonte' tafelschikking te maken, dus alle vrouwen naast elkaar en ook alle mannen, beiden niet onderbroken door de twee naast elkaar gelegen lege stoelen. Daar kan dan het bruidspaar gaan zitten zodat de hele tafelschikking 'antibont'

is.
Om dat te bereiken geven twee direct naast elkaar gezeten gasten elkaar de hand en wandelen zo samen naar de lege stoelen waarop ze plaatsnemen. Wie eerst links zat zit daarna ook weer links. Vervolgens herhalen twee eventueel andere directe buren deze handeling. We zoeken een methode waarbij aldus een ‘antibonte’ tafelschikking ontstaat. Elke keer dat er twee gasten van zetel veranderen noemen we een zet. Met $n = 2$ kan dit met slechts een zet.
We beweren: Voor $n > 2$ lukt dat met n zetten.

Opgave 2: Geef aan hoe dit kan voor $n = 3$, tot en met $n = 7$ in steeds n zetten.

Soms is het mogelijk om van een verplaatsingsschema voor $2n$ gasten een schema te maken voor $2n + 2$ gasten. Er worden dan twee stoelen naast elkaar ergens tussen gezet waarop de extra gasten gaan zitten. En bij de eerste n zetten moeten precies dezelfde mensen van plaats verwisselen zoals dat werd gedaan bij het schema voor $2n$ mensen. Na die n zetten mag er nog één extra zet worden gedaan om een maximale ‘antibonte’ rij te maken. En dan hebben we een oplossing voor $2n + 2$ gasten.

Opgave 2b: Probeer zo een oplossing voor $n = 3$ om te bouwen tot een oplossing voor $n = 4, 5,...$ En dat zo ver mogelijk, met steeds één zet extra. De bedoeling was wel om bijvoorbeeld bij $n = 5$ ook te beginnen met dezelfde zetten als bij $n = 3$ en 4. Helaas heeft niet iedereen dat zo opgevat. We geven eerst een uitwerking van **opgave 2b** en daarmee ook voor **opgave 2a** tot en met $n = 6$. Een mogelijkheid voor $n = 7$ zien we bij het antwoord op **opgave 3** voor $n = 4k + 3$ met $k = 1$.
We maken steeds een tabel met horizontaal de $2n + 2$ stoelen. De eerste en de laatste in die rijtjes zijn ook buren.
Opgave 2b: rood = oneven = man, wit = even = vrouw. We bouwen n= 3 om tot en met $n = 6$.

$n = 3$: zetten: 2 3 , 5 6 , 6 4							
1	2	3	4	5	6	-	-
1	-	-	4	5	6	2	3
1	5	6	4	-	-	2	3
1	5	-	-	6	4	2	3

$n = 4$: 7 8 tussen 4 en 5 zetten: 2 3 , 5 6 , 6 4 , 3 1									
1	2	3	4	7	8	5	6	-	-
1	-	-	4	7	8	5	6	2	3
1	5	6	4	7	8	-	-	2	3
1	5	-	-	7	8	6	4	2	3
-	5	3	1	7	8	6	4	2	-

$n = 5$: 10 9 tussen 1 en 2 zetten: 2 3 , 5 6 , 6 4 , 3 1 , 8 6											
1	10	9	2	3	4	7	8	5	6	-	-
1	10	9	-	-	4	7	8	5	6	2	3
1	10	9	5	6	4	7	8	-	-	2	3
1	10	9	5	-	-	7	8	6	4	2	3
-	10	9	5	3	1	7	8	6	4	2	-
6	10	9	5	3	1	7	-	-	4	2	8

$n = 6$: 11 12 tussen 10 en 9 zetten: 2 3 , 5 6 , 6 4 , 3 1 , 8 6 , 11 12													
1	10	11	12	9	2	3	4	7	8	5	6	-	-
1	10	11	12	9	-	-	4	7	8	5	6	2	3
1	10	11	12	9	5	6	4	7	8	-	-	2	3
1	10	11	12	9	5	-	-	7	8	6	4	2	3
-	10	11	12	9	5	3	1	7	8	6	4	2	-
6	10	11	12	9	5	3	1	7	-	-	4	2	8

6	10	-	-	9	5	3	1	7	11	12	4	2	8

Opgave 3: Bewijs dat het voor elke n lukt in maximaal n zetten. Voor $n < 3$ lukt het zelfs in minder dan n zetten. En we hebben al oplossingen tot en met $n = 6$.

We tonen aan dat het voor $n > 3$ altijd lukt in n zetten. We laten zien hoe je een methode voor elke even n kan ombouwen tot $n + 1$ met één zet extra. En we geven een schema voor $n = 4k$ en $n = 4k + 2$. Daarmee hebben we alle waarden van n gehad. Dit keer zijn enen mannen en nullen vrouwen. Cursief en vet betekent dat die twee personen gaan verhuizen en -- zijn lege stoelen.
***n* = 4*k*:** We geven $n = 8$ als voorbeeld. We verhuizen steeds eerst een paar 01 van links naar rechts en dan een paar 10 van rechts naar links zoals te zien in de tabel. Daarna zien we links een rijtje 1100 , rechts 1001 en in het midden een rijtje zoals voor $n – 1$ (geel). Daarmee herhalen we die twee zetten analoog aan de vorige twee en krijgen links en rechts 2 rijtjes 1100 en 1001.
Algemeen: Dit herhalen we net zo lang tot we links k rijtjes 1100 hebben en rechts k rijtjes 1001 en in het midden twee lege stoelen --. Nu verhuizen we (groene deel) steeds eerst van rechts naar links 0 0 en dan van links naar rechts 1 1. Totaal hebben we dan n zetten gedaan.
***n* = 4*k* + 1:** Voorbeeld: $n = 9$. Nu plaatsen we twee extra stoelen aan het eind (blauw) en doen verder dezelfde zetten als voor $n = 4k$. Aan het eind de extra zet verhuizen we nog twee nullen 0 0 . Q.e.d.

$n = 4k = 8$

1	***0***	***1***	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	-	-
1	-	-	0	1	0	1	0	1	0	1	0	***1***	***0***	1	0	0	1
1	1	0	0	1	***0***	***1***	0	1	0	1	0	-	-	1	0	0	1
1	1	0	0	1	-	-	0	***1***	***0***	1	0	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	0	0	-	-	1	***0***	***0***	1	1	0	0	1
1	1	0	0	***1***	***1***	0	0	0	0	1	-	-	1	1	0	0	1
1	1	0	0	-	-	0	0	0	0	1	1	1	1	1	***0***	***0***	1
1	***1***	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	-	-	1
-	-	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

$n = 4k + 1 = 9$ Voeg rechts 1 0 toe.

1	***0***	***1***	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	-	-	1	0
1	-	-	0	1	0	1	0	1	0	1	0	***1***	***0***	1	0	0	1	1	0
1	1	0	0	1	***0***	***1***	0	1	0	1	0	-	-	1	0	0	1	1	0
1	1	0	0	1	-	-	0	***1***	***0***	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0
1	1	0	0	1	1	0	0	-	-	1	***0***	***0***	1	1	0	0	1	1	0
1	1	0	0	***1***	***1***	0	0	0	0	1	-	-	1	1	0	0	1	1	0
1	1	0	0	-	-	0	0	0	0	1	1	1	1	1	***0***	***0***	1	1	0
1	***1***	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	-	-	1	1	0
-	-	0	0	0	0	0	0	***0***	***0***	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-	-	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0

***n* = 4*k* + 2:** (voorbeeld: $k = 2$)

1	***0***	***1***	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	-	-
1	-	-	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	***1***	***0***	1	0	0	1
1	1	0	0	1	***0***	***1***	0	1	0	1	0	1	0	1	0	-	-	1	0	0	1
1	1	0	0	1	-	-	0	1	0	1	0	***1***	***0***	1	0	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	0	0	1	***0***	***1***	0	-	-	1	0	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	0	0	1	-	-	0	0	***1***	***1***	0	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	***0***	***0***	1	1	1	0	0	-	-	0	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	-	-	1	1	1	0	0	0	0	0	0	***1***	***1***	0	0	1

***n* = 4*k* + 3:** voeg in het midden 0 1 toe.

1	***0***	***1***	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	-	-
1	-	-	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	***1***	***0***	1	0	0	1
1	1	0	0	1	***0***	***1***	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	-	-	1	0	0	1
1	1	0	0	1	-	-	0	1	0	1	0	1	0	***1***	***0***	1	0	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	0	0	1	***0***	***1***	0	1	0	-	-	1	0	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	0	0	1	-	-	0	1	0	0	1	1	0	0	***1***	***1***	0	0	1
1	1	***0***	***0***	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	-	-	0	0	1
1	1	-	-	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	***1***	***1***	0	0	0	0	0	0	1

1	1	***0***	***0***	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	-	-	0	0	1
1	1	-	-	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	***1***
-	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-

1	1	1	1	1	1	***0***	***0***	1	1	1	0	1	0	0	-	-	0	0	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	-	-	1	***1***	***1***	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	***1***
-	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	***0***	***1***	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-	-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

***n* = 4*k* + 2:** Nu beginnen we net als bij $n = 4k$ en gaan door tot links en rechts weer k rijtjes 1100 en 1001 staan. In het midden staat dan een rijtje als voor $n = 2$ (geel). Nu gaan we nog een zet verder en verhuizen nog een keer 0 1. In het midden hebben we dan 1 – – 0 0 1.
Dan verhuizen we afwisselend van rechts naar links 1 1 en van links naar rechts 0 0 . Merk op dat het er niet toe doet welke 11 en welke 00 je kiest. (Geldt ook voor $n = 4k$ en $n = 4k + 1$) In het voorbeeld zijn voor $n = 11$ ook niet dezelfde keuzes gemaakt als voor $n = 10$.
De laatste zet kiezen we nu de twee buitenste enen. Totaal $4k + 2 = n$ zetten.
***n* = 4*k* + 3:** Nu voegen we 0 1 in het midden toe en verhuizen weer dezelfde personen als voor $n = 4k + 2$. Bij de extra zet verhuizen we de toegevoegde 0 1. Totaal $4k + 3 = n$ zetten. Q.e.d.

Conclusie: Het lukt dus altijd in n zetten en voor $n = 2$ zelfs in 1 zet.
En dan was er nog een **extra vraag:**
Toon aan dat er voor $n > 2$ altijd n zetten nodig zijn, ofwel: Het lukt niet in $n - 1$ zetten.

Noem de plaatsen waar twee mensen naast elkaar zitten contacten. Er zijn 4 soorten contacten: mv, vm, mm en vv. Noem de contacten mv en vm **heterogeen** en noem mm en vv contacten **gelijk**.
Er zijn op elk moment in totaal $2n$ contacten: $2n - 1$ tussen directe buren en tussen één stel indirecte buren waartussen twee lege stoelen staan: het gat. Aan het begin zijn alle contacten heterogeen, ook die rond het gat.

Bekijk de 2*n* - 1 directe contacten:
Bij de start zijn die allemaal heterogeen.
Aan het eind zijn er $2n - 2$ gelijk ($n - 1$ keer mm, $n - 1$ keer vv) en één keer heterogeen (mv of vm). We moeten dus door de zetten in totaal $2n - 2$ directe heterogene contacten verbreken en $2n - 2$ directe gelijke contacten tot stand brengen.
We kunnen per zet maximaal 2 contacten verbreken en 2 contacten tot stand brengen.

Conclusie:
Als we in $n - 1$ zetten klaar willen zijn, dan moet elke zet 2 directe heterogene contacten verbreken en 2 directe gelijke contacten tot stand brengen.

Bekijk nu de eerste zet bij een opstelling met een vm gat.
Er zijn aanvankelijk alleen heterogene contacten en we moeten twee gelijke contacten tot stand brengen. We moeten dus wel een vm contact in het vm gat plaatsen. Daarbij worden er twee directe contacten mv verbroken en ontstaat er een mv gat. Er is dan een rijtje vvmm ontstaan. En we hebben dan inderdaad twee directe heterogene contacten verbroken en 2 directe gelijke contacten gevormd.

Bekijk nu de tweede zet: Nu hebben we een mv gat en moeten, om weer twee gelijke contacten te vormen, een mv koppel verhuizen. Ga na dat als daar ook maar een van de gasten uit het rijtje vvmm aan deelneemt we altijd een gelijk contact verbreken en dus nooit twee heterogene contacten verbreken. We kiezen dus een mv koppel dat niet uit het rijtje vvmm komt en maken daarmee vm gat en een mmvv rijtje. De gasten in beide rijtjes, vvmm en mmvv, kunnen we niet meer verhuizen, dus hebben we in elk geval twee stel heterogene directe buren die niet meer te scheiden zijn en we mogen maar een heterogeen contact overhouden.
Conclusie: Het is onmogelijk om in $n - 1$ zetten een maximaal ‘antibonte’ tafelschikking te

maken.